古典力学が古典になったことは一度もない

古川　晴貴

Department of Physics, Chuo University, Tokyo 112-8551, Japan

2018/3/17

Contents

Contents

自己紹介

所属： 中央大学　理工学部　物理学科　学部 4 年
素粒子理論研究室（指導教官：中村真教授）

研究： Einstein-Hoffmann-Infeld 方程式による
3 体問題の一般相対論的解析，
AdS/CFT 対応による物性物理学の考察

趣味： 天文学，科学史，ワイン，戦前の専門書漁り

その他： KEK サマーチャレンジ 10 期代表
（P07 Photon is our business, too!）
宇宙・素粒子スプリングスクール 2017
（高エネルギーガンマ線 A）

研究概要

古典力学の 3 体問題における Euler の直線解と Lagrange の正三角形解について，2.5 次以降の post-Newton 近似で計算することで一般相対論的に考察する．

目的 1： 重力波放射の影響を調べる．

目的 2： 既存の力学モデルでは説明が出来ない，
月の離心率の増大問題を説明するモデルを作る．

世界の中心で物理を学んだりけい

物理学は勿論面白い！ では古典力学は？

世界の中心で物理を学んだりけい

物理学は勿論面白い！ では古典力学は？

→学部に入るとどうしても，量子力学や相対性理論，物性物理学，素粒子物理学などに興味が向きがち．

世界の中心で物理を学んだりけい

物理学は勿論面白い！ では古典力学は？

→学部に入るとどうしても，量子力学や相対性理論，物性物理学，素粒子物理学などに興味が向きがち.

古典力学が古典になったことは一度もない.

→古典力学の面白さを感じて頂きたいです.

古典力学は面白い！

「私は，天体の運動は計算できるが，
民衆の醜さは計算できない.」（Newton）

今なお発展し続ける古典力学

- 古典可積分系（戸田格子，Volterra 格子，etc.）
- 非線型力学（カオス，ソリトン，etc.）
- 軌道力学（人工衛星の姿勢制御，ロケット技術，etc.）

3 体問題は面白い！

「3 体問題には手を出すな.」（古在由秀）

3 体問題は面白い！

「3 体問題には手を出すな.」（古在由秀）

入試問題にも出題された 3 体問題

- 工学院大学　一般入試（2003）
- 東京大学大学院　理学系研究科　物理学専攻（2007）
- 京都大学大学院　理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻（2017）

Contents

天体力学小史 (1)—古典力学の絶頂と天体力学

1687 年： Newton による『自然哲学の数学的原理』

1736 年： Euler による『力学もしくは解析学的に示された運動の科学』

1767 年： Euler による直線解の存在証明

1772 年： Lagrange による正三角形解の存在証明

1781 年： Herschel による第 7 惑星（天王星）の発見

1788 年： Lagrange による『解析力学』

1799 年： Laplace による『天体力学』

1846 年： Adams, Leverrier, Galle らによる第 8 惑星（海王星）の発見

1893 年： Poincarè による『常微分方程式』

天体力学小史 (2)—古典力学の困難と相対性理論

1905 年： Einstein による特殊相対性理論の提唱

1915 年： Einstein による一般相対性理論の提唱

1978 年： Hulse, Taylor らによる重力波放出の間接的観測

1990 年： Simó による舞踏解の発見

2000 年： Chenciner-Montgomery らによる舞踏解の存在証明

2015 年： 巨大観測装置 LIGO による重力波放出の直接的観測

2 体問題 VS 3 体問題

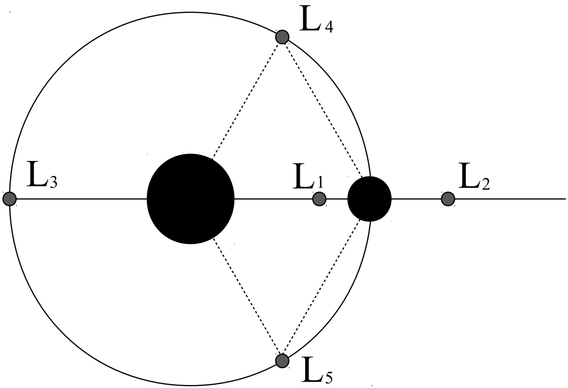
そもそも 2 体問題は何故解けた？

→簡単に言うと，解の軌道が平面に収まっていたおかげ．
ご存知の通り，計算も程よく手ごわいので，2 体問題を解いて Kepler の法則を証明する問題はよく講義や院試のネタになる．

では 3 体問題はどうか？

→一般には解の軌道が平面に収まらないので，第一積分（保存量）が足りない．1889 年，Poincarè は n 体問題（n は 3 以上の自然数）に十分な数だけ第一積分が存在しないことを示した．

円制限 3 体問題の特殊解



Euler の直線解（L_1，L_2，L_3），
Lagrange の正三角形解（L_4，L_5）

Lagrange point は何が面白い？

各点の安定性

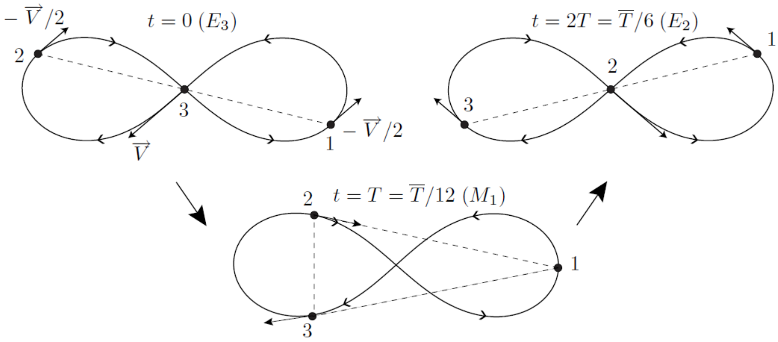
- L_1，L_2，L_3 は不安定点．L_4，L_5 は条件付き安定点．
  → （主星と伴星の質量比）$> \dfrac{25+3\sqrt{69}}{2} \simeq 24.96$

軌道力学における応用例

- 太陽・地球系の L_1 まわりに太陽・太陽圏観測衛星がある．
- 他にも様々な Lagrange point に観測衛星などが置かれている．

等質量 3 体問題の特殊解

Choreography：舞踏術，振り付け法



Chenciner-Montgomery の舞踏解 [1]

舞踏解は何が面白い？

現実的なモデルではないけれど・・・？

- コンピュータによる数値計算で新しい周期解を見つけた．
- 周期 $\overline{T} = 12T$ ごとに 3 質点が一直線，二等辺三角形の形になるという面白い周期性を持つ．
  →周期 T の基本単位をなす曲線弧の存在は変分法で言える（計算は大変）．
- 力学系と位相幾何学の新たな融合により存在証明がなされた．

重力場の方程式

古典力学（Poisson 方程式）：

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

但し，Δ，Φ，G，ρ はそれぞれ Laplacian，重力ポテンシャル，万有引力定数，質量密度．

一般相対性理論（Einstein 方程式）：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

但し，$G_{\mu\nu}$，Λ，$g_{\mu\nu}$，κ，$T_{\mu\nu}$ はそれぞれ Einstein テンソル，宇宙定数，計量テンソル，Einstein の重力定数，エネルギー・運動量テンソル．

Einstein 方程式の解析

Einstein 方程式の厳密解

Schwartzschild 解（1915），Kerr 解（1963），Weyl 解（1917），冨松・佐藤解（1972），など.
→よく調べられている.

Einstein 方程式の近似解

post-Newton 近似による摂動論的な近似手法，
Einstein-Hoffmann-Infeld 方程式による多体系の記述
→あまりよく調べられていない.

post-Newton 近似

一般相対論において弱い重力場を表現するとき，$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ をパラメータとして方程式や計量を展開する近似（以後 PN 近似という）.

↓

- ビリアル定理により，大雑把な議論をする上では 1PN 近似でも良いことが知られている.
- 先行研究により，2.5PN 近似が重力波放射の影響を表す項を与えるオーダーであることが知られている.

Einstein-Hoffmann-Infeld 方程式

$$
\vec{a}_A = \sum_{B\neq A} \frac{Gm_B \vec{n}_{BA}}{r_{AB}^2} + \frac{1}{c^2} \sum_{B\neq A} \left\{ v_A^2 + 2v_B^2 - 4(\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B) - \frac{3}{2}(\vec{n}_{AB} \cdot \vec{v}_B)^2 \right.
$$

$$
\left. -4 \sum_{C\neq A} \frac{Gm_C}{r_{AC}} - \sum_{C\neq B} \frac{Gm_C}{r_{BC}} + \frac{1}{2}((\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{a}_B) \right\}
$$

$$
\frac{1}{c^2} \sum_{B\neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}^2} \{\vec{n}_{AB} \cdot (4\vec{v}_A - 3\vec{v}_B)\} + \frac{7}{2c^2} \sum_{B\neq A} \frac{Gm_B \vec{a}_B}{r_{AB}} + O(c^{-4})
$$

$$
(A = 1, 2, \cdots, N)
$$

$c \to \infty$ で Newton 力学の結果に一致する．

最近の論文による先行研究

- Hideki Asada, Kei Yamada らによる 3 体問題の研究（2008〜）
  →円制限 3 体問題の特殊解について EHI 方程式を用いて 1PN 近似の範囲での計算を行っている．

  特に，Lagrange Point L_1〜L_5 の安定性の考察などを一般相対論の範囲で行っている．

- Schnittman による連星 BH の 3 体問題的考察（2010）
  → L_4，L_5 における連星 BH の運動を 1PN 近似の範囲で考察することで，重力波の放射の説明を試みている．

今後の研究の展望

- 2.5 次以降の PN 近似で 3 体問題を計算した時，重力波の寄与は現れるか？
- 他の 3 体問題の解を一般相対論的に解析出来るか？
- 月の離心率が増大する未解決問題を解決するモデルを与えることは出来るか？

参考文献

[1] A.Chenciner and R.Montgomery, Annals of Mathematics, 152 (2000)

[2] J.D.Schnittman, arXiv:1006.0182 (2010)

[3] Kei Yamada and Hideki Asada, arXiv:1011.2007 (2011)

[4] Kei Yamada and Hideki Asada, arXiv:1212.0754 (2012)

[5] Kei Yamada and Hideki Asada, arXiv:1512.01087 (2018)