作用素環論による量子力学の定式化
～超選択則とシュレディンガーの猫～*

京都大学　理学部　三回　大山 修平　(9/14 版)

2017/9/19-20

目 次

---

*この文章はぶつりがく徒のつどい (http://physicstsudoi.client.jp/index.html) での講演のレジュメとして書いたものです。誤まり・質問等ありましたら Twitter アカウント@rigakurage まで連絡をいただけると幸いです。

注 1) この PDF を書こうと思った主な理由は、物理専攻の学部生が手軽に読める作用素環論の解説記事があまりないと感じたからです。そこで作用素環論を学ぶきっかけとなればと思い、この分野の基本的な考え方やよく知られている定理を紹介し、それらの物理的解釈を大雑把に説明するように心がけました。そういったこともあり数学的に正確な定義や証明はしばしば省略していますので、数学の記事としてはあまり読めたものではないと思います。ですから細かいことが気になる方は参考文献 [1] 等の数学の本を参照してください。また LaTeX に不慣れなため文体の統一が出来ていないなど見苦しい点が多々あるかと思いますがご容赦ください。

1　イントロダクション

作用素環論あるいは C*-環論といっても物理の方にはあまりなじみがないかもしれませんが、実はこの分野は物理と数学が密接に関係しながら発展してきた分野です[1]。実際多くの物理学者がこの分野の発展に寄与してきました。ですからこのあたりの数学書を開いてみると「状態」等という物理っぽい言葉が出てきたり、あるいは様々な定理に物理的解釈を与えたりすることができたり非常に刺激的です。またこれらは単なる再定式化にとどまらず、今まで見落とされてきた（見て見ぬふりをしてきた）量子論の不思議な部分にすっきりとした解釈を与えてくれます。

そこでこの PDF では作用素環論を用いた量子力学の定式化およびそれらの応用のひとつとして普通の量子力学では見て見ぬふりをしていた（?）超選択則がどのように解釈されるのかということの説明をしたいと思います。

2　Hilbert 空間形式の量子力学

公理的な量子力学の復習をします。用意するものとしては次の二つでした：
1、Hilbert 空間 H
2、H 上の有界線形作用素 B(H)
ここで Hilbert 空間とは (完備な) 内積の入ったベクトル空間のことで、この元が系の状態を表したのでした。そこで物理では Hilbert 空間の元を状態ベクトルと呼びます。一方で有界線形作用素とは、Hilbert 空間から Hilbert 空間への線形作用素であって有界性という条件を満たす作用素です。有界性とはおおよそ作用素の連続性のことです。また物理では非有界な作用素も重要な役割を果たしますが、定義域や値域の扱いがややこしいことと、非有界作用素は有界作用素によりある意味で近似できることから、有界なもののみ考えることにします。
これらを用いると、たとえば関数解析の一般論から自己共役作用素の対してスペクトル測度と呼ばれる作用素値の測度が定まって、物理量の期待値を計算したりすることができます。このように公理的な量子力学では、ヒルベルト空間とその上の作用素を考えることで不確定性という量子論の特徴をとらえることができるわけです[2]。

しかしこの定式化は次のような疑問に答えてはくれません：
1、Hilbert 空間 H はどこから来たのか？
2、なぜ H の元が状態を表すのか？
3、なぜ B(H) の元が物理量を表すのか？

[1] 以下では作用素環と C*-環は特に区別せずに同じものとして扱います。
[2] ここではスペクトル測度の定義は述べませんが、重要なことは上の二つから物理的に必要な数学的道具がそろうということです。

そこでまずは作用素環による定式化を用いてこれらの疑問に答えるところから始めましょう。

3　作用素環形式の量子力学

3.1　物理量再考

前節のように物理量を B(H) の元と思うと、その時点で Hilbert 空間を考えてしまっていることになります。それでは意味がないので、ひとまず物理量の存在は認めることにして、それらのなす代数を考えてみましょう。そのために最低限必要と思われる構造は次の四つです：
1、和とスカラー倍
2、積
3、"自己共役"
4、ノルム

1 と 2 の必要性は自然だと思います。3 の概念も普通の量子力学に親しんでいれば必要性は明らかだと思われますが、共役とは Hilbert 空間の内積に関して定まる概念だったので、少し抽象化する必要があります。4 については直接物理的に解釈するのは難しいかもしれませんが、これは例えば作用素の有界性を記述するのに必要です。
これらの構造を考慮して浮かび上がってくるのが C*-環です[3]：

定義 1 A が C*-環であるとは、
（*1*）A はベクトル空間であって
（*2*）積 $\cdot : A\times\ A \to A : (a,b) \mapsto a\cdot b$
（*3*）インボリューション $^* : A \to A \quad s.t.\ a^{**}=a\ ,\ (ab)^*=b^*a^*$
（*4*）ノルム $||\bullet|| : A \to \mathbf{R}$　であって、

$$\|a^*\| = \|a\|, \|a^*a\| = \|a\|^2 \tag{1}$$

及びその他の整合性を満たすもののことである[4]。

もちろん（3）のインボリューションを用いて A の元に自己共役性を定義するわけです。物理量はこの意味で自己共役な A の元ということになります。

[3] もしかしたらこれらの構造も何か他の構造から導かれるのかもしれませんが、ここでは認めることにします。
[4] ここでいう整合性とはノルムの完備性とノルムの劣乗法性のことですが、この PDF では用いないので省略します。

3.2 状態再考

次に状態について考えたいわけですが、もちろん Hilbert 空間がないのでこちらも少し工夫しなくてはいけません。そこでそもそも状態とはなんなのか、立ち返って考えてみましょう。何らかの実験装置を思い浮かべてもらいますと、そこには物理量の期待値についての情報が含まれているはずです。それを絵にしたのが次の図です：

$$\mathrm{A} \ni \mathrm{a} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{考えている物理系}\\ \text{（状態 }\omega\text{）}\end{array}} \longrightarrow \omega\ (\mathrm{a}) \in \mathbf{C}$$

そこでひとまず状態を A から $\mathbf{C}$ への写像と思えばよさそうです。さらに付加的な条件として次の三つを要請しましょう：

（1）線形性　$\omega(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\omega(\mathrm{a})+\omega(\mathrm{b})$

（2）正値性　$\omega(\mathrm{a}^*\mathrm{a})\geq 0$

（3）規格化条件　$\omega(1)=1$

このような写像のことを数学の言葉では普通“A 上の規格化された正値線形汎関数”と呼びますが、作用素環論の文脈では（数学の言葉としても）これを“状態”と呼びますので、ここでもそう呼ぶことにします[5]。

以後 A 上の状態全体の集合を $S(A)$ と書くことにします。このとき $S(A)$ は凸集合となることが知られています[6]。実は $S(A)$ の端点である状態は純粋状態、それ以外の点は混合状態と呼ばれており、これらは量子力学で言うところの純粋状態及び混合状態の概念にぴったり一致します。以降純粋状態全体の集合を PS(A) と書くことにします。

3.3 GNS 構成

これで作用素環による定式化に必要な道具がそろいました：

1、C*-環 A

2、A 上の正値線形汎関数 ω

（ただし A の自己共役な元が物理量を表し、ω が状態を表すのでした。）

ここまでの話では、二つの定式化は全く異なるものに見えるかもしれません。しかしこれら 2 つの定式化を結びつけるのが次の定理です：

定理 1 (*GNS* 定理)

C^*-環 A と状態 ω に対して、

[5] 但し Hilbert 空間の元としての状態と区別したいときには正値線形汎関数という言葉も用いることにします。

[6] つまり任意の $S(A)$ の元 a, b と 0 以上 1 以下の実数 λ に対して、$\lambda a + (1-\lambda)b$ も $S(A)$ の元ということです。

Hilbert 空間 H_ω と、準同型写像 $\psi_\omega : A \to B(H_\omega)$ が存在する。加えて $\omega(a) = \langle \psi_\omega(a)x_\omega, x_\omega \rangle$ となる $x_\omega \in H_\omega$ が存在する。

定理の意味
上の定理の意味は、物理量のなす代数である A とその上の状態を一つ固定すると、ある Hilbert 空間が存在して、A はその上の有界線形作用素と思えるということです。これによって作用素環を用いた定式化における物理量が Hilbert 空間形式の定式化と同じように“作用素”として扱えるようになるわけです[7]。これが (おそらく) 作用素環論と呼ばれる所以です。

ここでは厳密な証明は与えませんが、Hilbert 空間 H とその上への写像 ψ_ω の構成を行いましょう：
まず Hlibert 空間を作りたいわけですが、それには内積が必要です。そこで、状態を利用して次のような写像を定義します：
$< \cdot, \cdot > : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathbf{C} : (\mathrm{a},\mathrm{b}) \mapsto \omega(\mathrm{b}^*\mathrm{a})$
これは内積の公理の内独立性[8]のみ満たさないことが知られています。そこで N_ω:=$\{\mathrm{a} \in \mathrm{A} \mid \omega(a^*a)=0\}$ としてこの内積が消えてしまう部分で A を割ってしまいます。そしてその上に $< \cdot, \cdot >_\omega : \mathrm{A}/N_\omega \times \mathrm{A}/N_\omega \to \mathbf{C} : ([\mathrm{a}],[\mathrm{b}]) \mapsto \omega(\mathrm{b}^*\mathrm{a})$ という写像を定めるとこれが A/N_ω の内積となります。

ただし一般にこの内積について A/N_ω は完備ではないので、$H_\omega := \overline{A/N_\omega}$ として完備化します。これで Hilbert 空間が構成できました。最後に写像 $\psi_\omega : \mathrm{A} \to \mathrm{B}(H_\omega)$ を $\psi_\omega(\mathrm{a})([\mathrm{b}])$:=$[\mathrm{ab}]$ で定めます。これが準同型写像になることはすぐに確かめられます。

x_ω の構成は行いませんが、$\langle \psi_\omega(a)x_\omega, x_\omega \rangle$ という形を見ればこの x_ω が状態ベクトルに対応することがわかると思います。これで 2 つの定式化にかけ橋ができました。

4 可換 C*-環と古典論

さてここで少し話が本題からずれますが、作用素環による古典論の記述について話をしましょう。オチを先に言ってしまうと実は古典論に対応するのは可換 C*-環であることがわかります。そのために、まずは可換 C*-環についての数学的準備から始めます。

4.1 可換 C*-環

可換 C*-環については指標空間と呼ばれる次のような空間を定義することができます：

[7] ただし状態は作用素上の複素数値関数ですから、二つの定式化は少しずれたままです。
[8] すなわち $\langle a, a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

定義 2
$\Omega(A) := \{\ \tau : A \to \mathbf{C} \mid$ 準同型　かつ　$\tau(1) = 1\ \}$
として A の指標空間という。

指標空間は、A が単位元をもつ場合コンパクトハウスドルフ空間[9]に、そうでない場合は局所コンパクトハウスドルフ空間になることが知られており、これによって単位的 C*-環の集まりとコンパクトハウスドルフ空間の集まりの間に対応がつくことが知られています[10]。そして、可換 C*-環の元はこの空間の上の関数とみなせるというのが次の Gelfand 表現です：

定理 2 ($Gelfand$ 表現)
可換 C^*-環 A の任意の元 a に対して、$\Omega(A)$ 上の複素数値関数 $\hat{a}$ を $\hat{a} := \omega(a)$ として定めると、$\hat{}$ は可換 C^*-環 A と $C(\Omega(A))$ の同型写像を与える。ただし $C(\Omega(A))$ は $\Omega(A)$ 上の連続関数のなす環。$\hat{a}$ を A の *Gelfand* 表現と呼ぶ。

すなわち可換 C*-環はコンパクトハウスドルフ空間上の関数環だと思えるということです。これは数学的にも重要な事実で、様々な場面で利用されます。(物理的な解釈はもう少し後で述べます。) ここで状態と指標はどちらも A 上の関数ですが、定義から異なる概念だということに注意してください。状態と指標の関係を教えてくれるのが次の定理です：

定理 3
可換 C^*-環 A に対して次は同値：
(1) $\omega \in \Omega(A)$
(2) $\omega \in PS(A)$

最後に必要な事実として、指標の核は極大イデアルとなることが知られています。これは代数幾何との対応を考えるうえでも重要な事実ですが、この PDF で用いるのは環を極大イデアルで割ると体となるという事実だけなのでそんなものかと思っていただければ十分です。

4.2　可換 C*-環と古典論

可換 C*-環に対して GNS 構成を行うことで次のことがわかります：

定理 4
可換 C^*-環 A と純粋状態 ω に対して、*GNS* 構成を行って得られる *Hilbert* 空間 H_ω は $\mathbf{C}$ に同型

[9] ここでコンパクトハウスドルフ空間という言葉にとらわれる必要はないと思います。後述のように (もちろん文脈に依りますが) 指標空間はセクターをパラメトライズする空間として物理的な役割を果たしたりします。
[10] 数学的に厳密な主張は「単位的可換 C*-環の圏とコンパクトハウスドルフ空間の圏は圏同値」となります。集まりとぼやかしたのはそのためです。

定理の証明のスケッチ：
まず、N_ω:={a∈A | $\omega(a*a)$=0} で A を割りましたが、ω が純粋状態であることから、指標です。したがって、$\omega(a*a) = \omega(a)^2$ なので N_ω=ker(ω) となります。よって N_ω は極大イデアルとなるので、A/ker(ω) は体となることがわかります。加えて A/ker(ω) は C*-環になることもわかるので、Gelfand-Mazur の定理から A/ker(ω)≃**C** となることがわかります。ただし、Gelfand-Mazur の定理とは A が C*-環でかつ体なら **C** に同型というもので、この時の対応は同型 $\sigma(\bullet) : A \to \mathbf{C} : a \mapsto \sigma(a)$ により与えられます。

<u>定理の意味</u>

Hilbert 空間として **C** が得られるので、A の元はその上の有界線形作用 B(**C**)≃**C** と思える。とくに自己共役な元は実数に移されるので、これは物理量が実数になるということであって、古典論にほかなりません。

実際、この実数が状態 ω における物理量の期待値であることが証明できます：

定理 5

A を可換 C^*-環、ω を A 上の純粋状態、[•] を GNS 構成における Hilbert 空間 H_ω への射影とするとき次の写像は等しい：

(1) $\sigma([\bullet]) : A \to \overline{A/N_\omega} \to \mathbf{C}$

$\qquad a \mapsto \quad [a] \quad \mapsto \sigma([a])$

(2) $\hat{\bullet}(\omega) : A \to C(\Omega(A)) \to \mathbf{C}$

$\qquad a \mapsto \qquad \hat{a} \qquad \mapsto \hat{a}(\omega)$ 　　(ただし $\hat{\bullet}$ は *Gelfand* 表現)

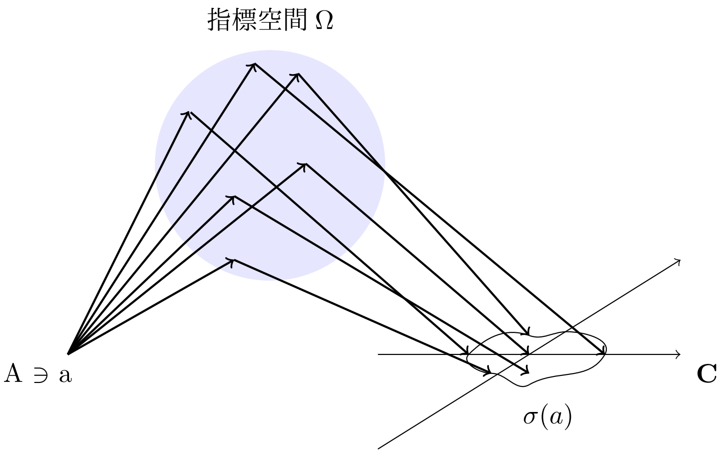
<u>定理の意味</u>

(2) の写像は定義から物理量の期待値を与えるものであって、Gelfand 表現から物理量は各状態に対してその期待値を返す関数となったわけでした。よってこの定理の主張は、“ 先の定理において構成した (1) の写像はある物理量のある状態における値を与えるもの ” となるわけです。つまり Hilbert 空間形式の定式化風に言えば、古典論とは Hilbert 空間が **C** の量子論なのです。

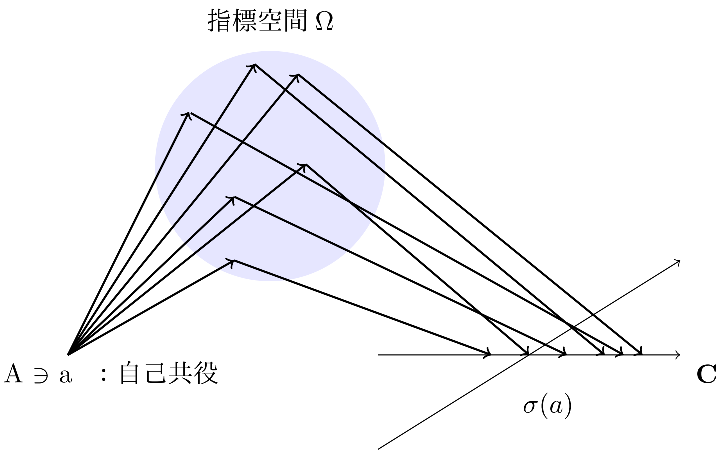
このようにして Hilbert 空間に縛られないことで、古典論と量子論を代数として統一的に扱え、同時に両者の違いを可換性と非可換性として特長づけることができました。ただしこのままでは “ 環が可換なら古典論、非可換なら量子論 ” となっており、表題にあるシュレディンガーの猫のようなミクロとマクロの混ざり合った量子古典複合系をどう記述すればよいのか明らかではありません。そこで次章以降はミクロとマクロがいかにして共存するのかを見ていくことにします。

4.3 余談

さて、ここで少し話がそれますが指標空間について僕の勝手なイメージを挟みたいと思います。
まず指標空間は次のような性質を持っています：
$\{\ \omega(a) \mid \omega \in \Omega(A)\} = \sigma\ (a)$. つまり、作用素環の元を一つ決めてスペクトル空間の元にあてていくと、複素数平面上にスペクトル[11]が描かれるということです。これをあらわしたのが次の図です：



ただし a から指標空間に向かう矢印は代入を表し、指標空間から複素数平面の矢印は写像を表しています。一般に自己共役な元は $\sigma(a) \subset \mathbf{R}$ となります。例えばエネルギーに対応する A の元をあてると、その固有値は $\mathbf{R}$ に含まれます：



[11] $a \in A$ のスペクトル $\sigma(a)$ とは $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} | a - \lambda \cdot 1$ が可逆でない $\}$ と定義され、固有値の一般化になっています。実際行列の固有値を考えると、対角化したうえで固有値倍した単位元を引いたものは可逆でなくなります：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}$

これはまさに、太陽光がプリズムによってその光のエネルギー準位毎に分光され、スペクトルがみられる現象にそっくりではないでしょうか？

僕はこのアナロジーが気に入っているので、心の中で指標空間のことを“プリズム”と呼んでいます。（ただしこの用語は半分ジョークのようなものなので、可換 C*-環のプリズムといっても誰にも通じません。）

5　作用素環の表現と超選択則

前節までで、作用素環を用いることで量子力学がすっきりと定式化できることがわかってもらえたかと思います。

ここからはその応用として、Hilbert 空間形式の量子力学ではある意味天与のものとして扱われてきた超選択則について、作用素環論の観点から自然な解釈を与えたいと思います。

5.1　既約表現と可約表現

ここでは作用素環の表現を扱います。ただし使うのは表現の可約性と既約性だけなのでこの章ではその定義を簡単に述べるだけにとどめます。

まず作用素環の表現は次のように定義をしましょう。

定義 3
C-環* A の表現とは、*Hilbert* 空間 H と、$\psi : A \to B(H)$: *-準同型の組 *(H,ψ)* のこと。

表現という言葉を用いると、GNS 定理は“任意の C*-環は H 上に表現できる”と言い換えられます。
次に既約表現を定義します[12]。

定義 4
C-環* A の表現 *(H,ψ)* が既約とは、*Hilbert* 空間 H の $\psi(H)$ 不変部分空間が、*0* と H のみとなること。また、表現が既約でないとき可約という。

定義のイメージ

不変部分空間があるというのは大雑把にいうと、行列で描いたときに任意の $a \in A$ に対して、

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

[12]GNS 定理を介して、状態と表現の対応が得られます。少なくとも (有限自由度の) 量子力学や熱平衡系を扱うなら状態と表現の往来はすぐにできるので、以後は作用素環と表現の組を考えます。ただし状態と表現の対応がどこまで付けられるのか僕は知りません。

となることを意味します。

逆に表現が既約であるとは、ある $a \in A$ が存在して、

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

となることを意味します。

最後に表現の同値性について定義しておきます。

定義 5

C-環 A の表現 (H_1,ψ_1) と (H_2,ψ_2) がユニタリー同値とは、ユニタリー作用素 $U : H_1 \to H_2$ であって、任意の $a \in A$ に対して、$U \circ \psi_1(a) = \psi_2(a) \circ U$ をみたすものが存在すること。*

さて、物理量のなす代数の表現について具体的に考えてみましょう。(有限自由度の) 量子力学では、位置 x と運動量 p が正準交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たすことを要請しました。これが物理量の代数です。（これを CCR 代数といいます。）そこで、例えば位置と運動量をそれぞれ掛け算作用素と微分作用素と思ったのが波動力学であって、それぞれを無限次元の行列として思ったのが行列力学です。このように一つの代数について様々な表現があって、具体的な計算を行うには一つ表現を決めなくてはいけません。 このとき次の事実が知られています：

定理 6 *CCR 代数の既約表現はすべてユニタリー同値*

これがいわゆるストーン-フォンノイマンの一意性定理と呼ばれるもので、しばしばこの定理により波動力学と行列力学が統一され量子力学が完成した、などと言われます。おそらくこの定理によって、「既約表現ならどれを考えても同じなんだから既約表現こそすべて」という考えが芽生えたのだと思われます。

5.2 超選択則

次に超選択則について復習しましょう。

まず、次のようなことが知られています：

“ 世の中には量子的な干渉効果が見られないような状態がある ”

例えばシュレーディンガーの猫を考えると猫が生きている状態と死んでいる状態の重ね合わせは見られません。またミクロの世界でも、中性子と陽子の状態の重ね合わせは見られません。後者については意外に思うかもしれませんが、理由は単純で、電荷が測定できるからです[13]。

[13] 測定しなければ重ね合わせが生まれるじゃないかと思われるかもしれませんが、それはいわゆる混合状態と呼ばれるもので、量子論的干渉ではありません。この章の内容は全体を通して混合状態と非常にかかわりがあり、作用素環論を用いることでより統一的な解釈ができますがここでは割愛します。

一つ目の例がパラドックスとしてとらえられる理由は、猫がいている状態と死んでいる状態の重ね合わせなどないという経験則が含まれています。よくある説明としてはマクロな系に対し量子論を用いたから誤りが生じたというものですが、これでは説明になっていません。他方二つ目の例に対してなされる説明こそが、超選択則です。すなわち、

“ 世の中には重ね合わせられない選ばれし状態が存在する ”

というものです。しかしこれも説明になっていません[14]。これら二つの例は同じ問題を扱っているにもかかわらず、それぞれ異なった不自然な説明がなされています。

なぜこのようなことになるのか具体的に考えてみましょう。そもそも量子論的な干渉効果が見られないとはどういうことでしょうか？大雑把には次のように理解できます：

例えば、$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_p \end{pmatrix}$, $\psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_n \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_1, \psi_2 \in H$ という二つの状態ベクトルを考えます。これらの重ね合わせ ψ を $\psi = \psi_1 + \psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix}$ として定めます[15]。このとき任意の物理量 $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} \in B(H)$ の期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \psi, a\psi \rangle &= \langle \psi_1 + \psi_2, a(\psi_1 + \psi_2) \rangle \\ &= (\psi_n, \psi_p) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_p \end{pmatrix} \\ &= \langle \psi_n, a_{11}\psi_n \rangle + \langle \psi_n, a_{12}\psi_p \rangle + \langle \psi_p, a_{12}^*\psi_n \rangle + \langle \psi_p, a_{22}\psi_p \rangle \\ &= \langle \psi_n, a_{11}\psi_n \rangle + \langle \psi_p, a_{22}\psi_p \rangle + 2Re\langle \psi_n, a_{12}\psi_p \rangle \end{aligned}$$

となることがわかります。したがって量子論的干渉効果が見られないというのは、任意の物理量 a について $a_{12} = 0$ ということであって、これはまさしく表現が可約になっていることを表しているわけです。

つまり可約表現を捨てて既約表現に固執したしわ寄せが超選択則ということです[16]。

しかし、ここまでくれば明らかかと思いますが、捨てるべきなのは既約表現ではなく超選択則の方です。すなわち、中性子と陽子の重ね合わせ/猫が生きている状態と死んでいる状態の重ね合わせは存在しないのではなく、和を

[14]ただし超選択則は文脈によって様々な意味をもちます。それらすべてを否定しているわけではありません。

[15]本来は ψ の長さが 1 になるように重みづけすべきですが、ここでは干渉項が見られれば十分なので簡単のため二つの和を取りました。

[16]実際には Hilbert 空間形式の量子力学においてもこのような重ね合わせを扱うことができます。いわゆる密度行列を用いた計算ですが、技術的には問題なくとも数学的構造が見えやすいとは言えません。

考えてもよいのですが表現が可約になることによって干渉項が消えているだけなのです[17]。

6　セクターと秩序変数

既約表現にこだわっていられない理由をあげると、すでに述べたことも含めて
０、任意の表現が既約表現の直和に分解するとは限らない。
１、超選択則は不自然
２、熱平衡系 (いわゆる KMS 状態) は一般に表現が可約になる。
３、無限自由度系では既約表現の一意性定理は成り立たない (竹崎の定理)
などがあります。

しかし既約表現を捨てるとなると、素な表現として何を持ってくるかを考えなくてはいけません。そこでヒントとなるのが上にあげた２、の KMS 状態と呼ばれるものです。ここでは KMS 状態の定義は述べませんがこの状態から定まる表現の特徴は、A を C^*環 とすると、　$\psi(A)\cap\psi(A)' = \mathbf{C}$ となることです。ここで $\psi(A)' = \{a \in A | ab = ba, b \in B(H)\}$。このような表現を因子表現といいます。一般に、任意の表現に対して、可換環 $\psi(A)\cap\psi(A)'$ を表現の中心というので、因子表現とは中心が $\mathbf{C}$ である表現と言ったりあるいはもっと簡単に中心が自明な表現と言ったりします。例えば既約表現は因子表現です。さて任意の表現については次のようなことが知られています：

定理 7
C^*-環 A と、その表現 ψ に対して $\psi(A) = \int_{\gamma\in\Omega}^{\oplus} \psi_\gamma(A) d\mu(\gamma)$ という分解ができる。ただし Ω は中心 $\psi(A)\cap\psi(A)'$ の指標空間、μ はその上に入る自然な測度であって、各 ψ_γ は因子表現。[18]

<u>定理の意味</u>
まず式の中に直積分 $\int^{\oplus}$ がありますが、よくわからなければただの直和だと思ってもらって差し支えありません。なぜこのような分解が成り立つかを直感的に言うと次の通りです：

まず、中心の元がお互いに可換なことから同時対角化できるので、そのスペクトルの値をすべて指定していくことにより固有分解ができます。一方指標空間の元は前述のとおり各元のスペクトルの値をすべて指定してくれるので、これをパラメータにして直積分 (直和) に分解できるのです[19]。つまりこの定理の内容は「任意の表現は、その中心という“見える物理量”の期待値を

[17]つまり問うべきはなぜ干渉効果を示す物理量が存在しないかということであって、そういう意味でこの問題において系がミクロかマクロということは本質的な違いではないのです。
[18]この定理が成立するのは厳密には A が von Neumann 環の場合ですが、ここでは立ち入りません。von Neumann 環とは $C^* -$ 環 の中でも性質の良いものと思ってください。
[19]リー環のことをご存知ならば、中心をカルタン部分環、指標空間の元をウエイトだと読み替えるとこれはちょうどウエイト分解に対応します。

指定した表現に分解=識別することができる。」ということを言っているわけです[20]。たとえば物理系として非平衡な熱力学系を考えます。一般論からこれらは非自明な中心を持ちますが、上の定理を用いると、その中心の元のスペクトル (≒固有値) によってパラメトライズされた分解を持ち、しかも分解されたそれぞれは因子表現 (≒熱平衡系≒温度の定まった系) になると言っているわけです。ならば思い切って中心のある元 T を温度と思えばどうでしょう？すると表現は温度の期待値ごとにパラメトライズされた表現に分解されると読み替えられますから、表現 ψ_γ は温度が $\gamma(T)$ の状態を表すと想像できます。実際スケール変換不変性のある物理系を考えると、代数的な場の理論の一般論から表現の中心として $\mathbf{R}^+$ 上の連続関数環が現れます。この関数環の恒等関数を温度と思うと、この物理量のスペクトルが温度と解釈できることがわかります。すなわち温度を手で与えるのではなく、理論から創発する物理量の一つとみなせるわけです[21]。

この意味で、より一般に物理量のなす環の表現の中心の元を秩序変数と呼びます。すなわち、あらゆる物理量は (それがミクロな量かマクロな量かにかかわらず) いずれも代数の元であって、その中で表現の中心に属するものをマクロ変数として我々は " 見ている " ということです。このように作用素環論を用いることで量子論と古典論を統一的な視点で眺めることができるわけです。

以上のことをまとめると、既約表現しか考えない定式化で古典論と量子論が統一的にあるかえなっかた理由は明らかです。すなわち、古典論とは、物理量のなす代数の表現の中心という可換環を調べる作業です。対して既約表現しか考えない Hilbert 空間形式の量子力学では、(既約表現は特に因子表現なので) 表現の中心は自明になり、秩序変数のなす代数すなわち古典論の世界は現れません。したがって量子・古典複合系を扱うには、本質的に作用素環論的扱いが必要と言えます。

7 まとめ

以上で述べたように、作用素環論による定式化は理論的美しさにとどまらず、量子論と古典論を統一的に扱う上で積極的な意味を持っていると思われます。もちろんこの記事で書いたこと以外にもたくさん面白い事実が知られており、量子力学の観測理論や数学的な場の理論への応用などいずれも従来の定式化にはない視点を与えてくれます。一方で純物理的な四次元の場の理論の研究はあまり盛んではないようです。おそらくこれは、理論の出発点が

[20] リー環の話と絡めればもう少し具体的な例を挙げることができます：スピンを表すリー環 sl(2,$\mathbf{C}$) のカルタン部分代数は一次元ですが、その基底として z 方向のスピンをとることで固有値が↑か↓かでウエイト分解することができます。これはまさに z 方向のスピンを " 見る " ことによって識別しているわけです。しかし、" 見える " 部分は一次元分しかないので、二方向以上のスピンは同時に観測できないわけです。

[21] 詳しくは参考文献の [4] をご覧ください。

代数的なところにあるので具体的なモデルの構成が難しいことが原因だと思われます。実際現在知られている代数的定式化による相対論的場の理論のモデルは相互作用しない自由場しかありません。このように具体的構成や計算ができないとなると物理としての肩身は狭くなってしますわけです。それでも有限自由度の量子力学のついては、上で述べてきたようにある種直感的な理解が得られますし、なにより数学によってこれほどまできれいに物理が書き直される例は他にあまりないのではないでしょうか。

また、話はそれますが作用素環論、特に Gelfand 表現は非可換幾何学のきっかけになったものの一つでもあります。これは大雑把に言うと「可換 C*-環とコンパクトハウスドルフ空間が対応するのであれば非可換 $C^* -$ 環 は“ 非可換 ”コンパクトハウスドルフ空間に対応するのではないか」という思想です。作用素環論はこのように空間に対する新しい認識も与えてくれるのです。

以上のように作用素環論は非常に魅力的な分野です。今回述べることができたのはごく一部ですが、その面白さがこの PDF を通して一人でも多くの方に伝われば望外の喜びです。誤植やくどいところなど沢山あったと思いますが最後まで読んでくださってありがとうございました。

8　参考文献

最後に参考文献とそれらについてのコメントを少しつけて終わりたいと思います。

[1]J.G.Murphy“ C*-algebras and Operator theory ”

数学的な作用素環論の入門書です。代数的なことはすごく基本から書かれていますが、解析的な知識はある程度仮定されています。この PDF の内容はこの本の 1 章から 3 章と 5 章を読めばカバーできると思います。

[2] 小嶋　泉「量子場とミクロ・マクロ双対性」

作用素環論のみならず、様々な数学を用いて量子論を考察している本です。この PDF の内容はこの本にかなりの影響を受けています。かなり過激な言葉と高度な数学で現状の量子論を批判しており少し面食らうかもしれませんが、面白いアイデアが散りばめられているので既に作用素環論にある程度なじみがあって、物理との関連が知りたいときに読むとよいと思います。

[3]Ola Bratteli“ Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics ”

作用素環論を用いた物理の本です。特に数学的な準備も行ってくれているので、がっつり数学として学ぶ予定がない場合はこの本がよいかもしれません。

[4]Ojima,I. ,Temparature as Order Parameter of Broken Scale Invariance,Publ.RIMS(KYOTO Univ.) **40**,731-756(2004)
スケール変換不変性の破れが秩序変数としての温度を創発するという論文です。

[5]R.Haag " Local Quantum Physics Fields,Particles,Algebras "
これは作用素環論と場の理論のある程度の知識を前提として代数的場の理論の一般論が展開されている本です。