相対論的時空の幾何学

たっつー @tattsu_yellow

概要

本ノートは、第５回ぶつりがく徒のつどいにおける講義「相対論的時空の幾何学」の講義ノートとして作成されたものである。しかし、筆者の怠惰のため公開が遅れてしまったことをここにお詫び申し上げる。さて本講義であるが、非相対論的な時空と異なり我々の直観に反する性質を多く備えている相対論的な時空を、幾何学の言葉を用いて分かり易く定式化しようという試みのもと行われる。

目次

0　多様体論の基礎

本節では、本講義の前提となる多様体論の基礎について簡単にまとめる。まず、多様体の定義から始めよう。簡単にいえば、多様体とは局所的に Euclid な空間のことである。

定義 0.1 (位相多様体)

位相空間 M が n 次元位相多様体 (topological manifold) であるとは、次を満たすことである:

(1) M は第二可算公理を満たす Hausdorff 空間

(2) M の任意の点が $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な開近傍を持つ。

Remark : 多様体の定義に第二可算公理を課さないこともあるが、ここでは課すこととする。しかし、本講義では特に問題にならないので気にしなくて良い。

以下、M を n 次元多様体とする。

定義 0.2 (チャート、アトラス)

U を M の開集合、V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。このとき、同相写像 $\varphi : U \to V$ を U 上の局所座標系といい、組 (U, φ) を M の座標近傍またはチャート (chart) という。また、M のチャートの族 $\mathcal{S} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が M を被覆しているとき、すなわち $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ を満たすとき、$\mathcal{S}$ を M の座標近傍系またはアトラス (atlas) という。

Remark : チャート (U, φ) の代わりに、より具体的な座標 $\varphi(p) = (x^i(p))_{i=1}^n$ を用いて、$(U; x^1, \ldots, x^n)$ と書くこともある。

Example : 最も簡単な C^∞ 級多様体の例は、n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ にアトラス $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$ が生成する C^∞ 級微分構造を入れたものである。このように Euclid 空間を可微分多様体として捉えたものをアフィン空間という。

定義 0.3 (C^∞ 級アトラス)

$\mathcal{S} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M のアトラスとする。このとき、任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha{}^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ が C^∞ 級のとき、$\mathcal{S}$ を M の C^∞ 級アトラスという。

定義 0.4 (可微分多様体)

$\mathcal{S} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \mathcal{T} := \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ を M の C^∞ 級アトラスとする。このとき、和集合 $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ もまた M の C^∞ 級アトラスであるとき、$\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は同値であるという。また、$\mathcal{S}$ に同値な C^∞ 級アトラス全ての和集合 $\mathcal{M}$ を、$\mathcal{S}$ が生成する M の C^∞ 級極大アトラスまたは C^∞ 級微分構造といい、組 $(M, \mathcal{M})$ を C^∞ 級 (可微分) 多様体という。

Remark : 位相空間などと同様に、微分構造を省略して単に M を C^∞ 級多様体と呼ぶことが多い。また、通常 C^∞ 級多様体 M のチャートを考えるときはその微分構造に含まれるもののみを考える。

以下、M を n 次元 C^∞ 級多様体とする。

定義 0.5 (C^∞ 級関数)

$f : M \to \mathbb{R}$ を M 上の関数とする。このとき、M の任意のチャート (U, φ) に対して写像 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であるとき、f を M 上の C^∞ 級関数という。また、M 上の C^∞ 級関数全体を $C^\infty(M)$ とかく。

定義 0.6 (接ベクトル、接空間)

写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が点 $p \in M$ における方向微分 (directional derivative) または接ベクトル (tangent vector) とは、次を満たすことである:

(1) $v(af+bg) = av(f) + bv(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall f, g \in C^\infty(M)$

(2) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$

(3) $f, g \in C^\infty(M)$ が点 p のある開近傍上で一致するとき、$v(f) = v(g)$

点 p における接ベクトル全体を T_pM と書き、p における接空間 (tangent space) という。

Remark: 定義より、線型写像の加法、スカラー倍に関して T_pM はベクトル空間となる。

Example: $c : (a,b) \to M$ を C^∞ 級曲線とする。このとき、$t_0 \in (a,b)$ に対して写像 $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t_0} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ を

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t_0}(f) := \frac{d(f \circ c)}{dt}(t_0) \quad \forall f \in C^\infty(M) \tag{1}$$

で定義すると、$\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t_0} \in T_{c(t_0)}M$ である。 逆に、任意の接ベクトル $v \in T_pM$ に対してある C^∞ 級曲線 c が存在して、$v = \left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t_0}$ とかける。このことから、接ベクトルは曲線の微分であると考えられる。

Example: $(U, \varphi) = (U; x^1, \ldots, x^n)$ を M のチャートとする。このとき、$p \in U$ に対して写像 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ を

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i(p)}(x^1(p), \ldots, x^n(p)) \quad \forall f \in C^\infty(M) \tag{2}$$

で定義すると、$\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$ である。また、$(V; y^1, \ldots, y^n)$ を点 p のまわりの別のチャートとすると、

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \tag{3}$$

が成り立つ。

命題 0.7 (接空間の基底、次元)

$(U; x^1, \ldots, x^n)$ を点 $p \in M$ のまわりのチャートとする。このとき、$\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}_{i=1}^{n}$ は、T_pM の基底となる。特に、

$$\dim_{\mathbb{R}} T_pM = n \tag{4}$$

である。

■

Proof:

定義 0.8 (余接ベクトル、余接空間)

点 $p \in M$ に対し、T_p^*M を T_pM の双対空間として定義する:

$$T_p^*M := \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}) \tag{5}$$

このとき、T_p^*M は n 次元実ベクトル空間であり、これを余接空間、その元を余接ベクトルという。

Remark : 上で接ベクトルは曲線の微分であると述べた。余接ベクトルは接ベクトルに対して実数値を返す線形作用素であるので、これを曲線上に分布させることによって積分することができる。すなわち余接ベクトルは積分要素と考えられる (1 次微分形式)。

Example : $f \in C^\infty(M)$ に対して、$df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ を

$$df_p(v) = v(f) \quad \forall v \in T_pM \tag{6}$$

で定義すると、$df_p \in T_p^*M$ である。df_p を f の p における全微分という。

Example : $(U; x^1, \dots, x^n)$ を M のチャートとする。このとき、関数 x^i の点 $p \in U$ における微分 $dx^i{}_p$ は、T_pM の基底 $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right\}$ に対する双対基底をなす:

$$dx^i{}_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \delta^i_j \tag{7}$$

また、$(V; y^1, \dots, y^n)$ を p のまわりの別のチャートとすると、

$$dx^i{}_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p)\, dy^j{}_p \tag{8}$$

が成り立つ。

1　相対論の基本原理

この節では、相対論を特徴づける基本原理について述べる。が、その前にまずは物理現象の舞台となる時空、そして物理現象を起こす主役である粒子について必要最低限の要請を行う。

以下、$c = 1$ (無次元) とし、時間と空間の次元を一致させる。また、以下では Einstien の縮約則に従い、同じ index に対して和を取るものと約束する。

仮定 1.1 (時空)

時空は 4 次元の連結な C^∞ 級多様体であり、これを M^4 と書く。また、M^4 のチャートを (局所) 基準座標系、(局所) 観測系などと呼ぶ。

Remark : $(U; x^0, x^1, x^2, x^3)$ を M^4 のチャートとした時、$p \in M^4$ に対して、$x^0(p)$ を p の時間座標、$x^i(p)$ $(i = 1, 2, 3)$ を p の空間座標を意味するように取るものとする。しかし、この段階では時間座標と空間座標を区別することができない。後に時間と空間を区別する幾何構造を与える必要がある。また、時間座標は単なる座標であり、物理的に意味のある時間とは異なることにも注意せよ。以下、原則として添え字の記号に μ, ν などのギリシア文字を用いた場合はその値として時空成分 0,1,2,3 を取ることとし、i, j などのラテン文字を用いた場合は空間成分 1,2,3 のみを取ることとする。また、チャート $(U; x^0, x^1, x^2, x^3)$ を (U, x^μ) のように略記する。

Remark : この仮定において時間と空間を対等に扱ってる点は相対論の特徴と言えよう。非相対論的な時空のモデルではいわゆる絶対時間を採用しており、時間を $\mathbb{R}$ で、空間を 3 次元連結 C^∞ 多様体 M^3 で表し、その直積 $\mathbb{R} \times M^3$ として時空を表す。ここで時間 $\mathbb{R}$ のパラメータは相対論とは異なり、物理的に意味のある時間を表している。

仮定 1.2 (粒子)

粒子とは、固有の質量 (正の実数値) を持ち、M^4 の (区分的) C^∞ 級曲線として力学的状態が完全に記述される物体である。この曲線をその粒子の世界線という。

さて、では準備ができたので相対論の基本原理について述べよう。まずは、時空を幾何学的に捉える立場において自明でしかない相対性原理である。

相対性原理

すべての自然法則は基準系の取り方に依存しない。特に、自然法則を表す方程式は座標変換に関して共変である。

大層な名前がついているが、言っていることは極めて当然のことであり、わざわざ原理として取り立てるほどのものではない。ましてや相対性原理などとあたかも相対論の本質であるかのような顔をしているが、そんなことはない。実際相対性原理は非相対論でも言えることである。しかし、ここで相対論と異なるのは、非相対論では空間座標の取り方に対して共変なのであって、時間を含めた変換に対しては一概に言えないことである。(そこで、かつての物理学者たちは Galilei 共変性を考えた。) 一方、相対論は時間と空間を対等に扱っている特性ゆえに時間と空間が混在した座標変換に関しても共変性が成り立つ。その意味で、相対論は非相対論の拡張と言えよう。相対論において本質的なのは相対性原理などではなく、時間と空間を対等に扱っている点であるのだ。

次に、こちらは相対論において非常に重要である近接相互作用の原理である。

近接相互作用の原理

粒子間の相互作用は直接的には行われず、場を媒介して行われる。具体的には、時空の各点において粒子と場が局所的に相互作用し、さらにその作用を受けた場が伝播することで別の世界点に存在する粒子と間接的に相互作用する描像を採用する。

この原理もまた、相対論の特徴である時間と空間の対等性によって説明することができる。まずは非相対論的な Newton 力学を考えよう。Newton 力学は、遠隔相互作用の立場にあるため、離れた位置にある粒子が直接相互作用しあうことができる。では、別の時刻にある粒子が直接相互作用し合うことは許されるだろうか？答えは当然 No である。これを時間の局所性とでも呼ぼう。Newton 力学で時間に関しては局所的であるが空間に関しては局所的でない。ここに非対等性が現れている。これを対等にした結果が近接相互作用の原理であると考えられる。すなわち、相対論では時空は局所的なのである。

2 Lorentz 計量

前節で、粒子間の相互作用は場の伝播によって為されると述べた。この場の伝播を相互作用の信号と呼ぶことにしよう。この信号は、時空の好き勝手な方向に伝播できるわけではない。信号は "時間の方向" にしか伝播できないのである。このことによって時空の因果構造が構成されるのだが、それは次節で考えることにする。さて、この "時間の方向" を幾何学的に定式化したい。時空は局所的であるので、各点における接ベクトルに対して時間的かどうかを定めれば良い。それを定義するために、時空に Lorentz 計量なるものを与える。これを与えることによって、因果構造を得られるほか物理的に意味のある時間の大きさを定義できたり、さらには Levi-Civita 接続が一意的に定まり時空の各点の局所的な繋がりを得ることができたりと、非常に豊かな幾何構造を与えることができる。また、等価原理を課すとこの計量が実は重力場を表現していることが分かる。この節では、その Lorentz 計量を定義する。まず、次の補題を考えよう。

補題 2.1 (Sylvester の慣性法則)

任意の実対称行列 A に対して、ある実正則行列 S が存在して、

$$SAS^T = \mathrm{diag}(+1, \dots, +1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1) \tag{9}$$

と変形できる。このとき、$+1$ の個数 n_+, 0 の個数 n_0, -1 の個数 n_- は S の選び方に依存しない A の固有のものである。n_+ を A の正の慣性指数、n_- を A の負の慣性指数という。n_0 は A の核の次元、すなわち退化

次数である。

定義 2.2 (擬 Riemann 多様体)

M を C^∞ 級多様体、$g : M \ni p \mapsto g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ を C^∞ 級写像とする。このとき、任意の $p \in M$ に対して双線形形式 $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ が非退化対称形式であるとき、すなわち

$$g_p(v, w) = g_p(w, v) \quad \forall v, w \in T_p(M) \tag{10}$$

$$g_p(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_p(M) \qquad \Leftrightarrow \qquad v = 0 \tag{11}$$

が成り立つ時、g を M の擬 Riemann 計量、(M, g) を擬 Riemann 多様体という。

Remark : $(U; x^1, \ldots, x^n)$ を点 $p \in M$ のまわりのチャートとすると、擬 Riemann 計量 g は

$$g_p = g_{ij}(p) dx^i{}_p \otimes dx^j{}_p \tag{12}$$

$$g_{ij}(p) := g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) \tag{13}$$

と書ける。また、$(V; y^1, \ldots, y^n)$ を p のまわりの別のチャートとすると、

$$\begin{aligned} g_p &= g_{ij}(p)\, dx^i{}_p \otimes dx^j{}_p \\ &= g_{ij}(p)\, \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(p)\, \frac{\partial x^j}{\partial y^l}(p)\, dy^k{}_p \otimes dy^l{}_p \end{aligned} \tag{14}$$

と変換される。ここで、$G := (g_{ij}(p)), S := (\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p))$ とおくと、座標変換に関して

$$G \longrightarrow SGS^T \tag{15}$$

なる変換を受け、G は対称行列、S は正則行列であるので、Sylvester の慣性法則より g_p はチャートのとり方に依らない慣性指数を持つことが分かる。さらに g_p は非退化であるので退化次数は 0 であり、よって g_p は p に関して滑らかに変化するため慣性指数は p に依らない。そこで、g に固有の慣性指数の組 (n_+, n_-) を g の計量符号という。

定義 2.3 (Lorentz 多様体)

(M, g) を n 次元擬 Riemann 多様体とする。g の計量符号が $(1, n-1)$ であるとき、g を Lorentz 計量、(M, g) を Lorentz 多様体という。

3 因果構造

さて、以下では時空 M^4 に Lorentz 計量 g が備わっているものとする。このとき、M^4 上の接ベクトルを次のように分類する。

定義 3.1

点 $p \in M^4$ における接ベクトル $v \in T_pM^4$ に関して、$g_p(v, v) > 0$ であるとき v は time-like、$g_p(v, v) = 0$ であるとき v は null-like、$g_p(v, v) < 0$ であるとき v は spacce-like であるという。

ここで定義した time-like な接ベクトルの方向こそまさに "時間の方向" である。任意の信号は、time-like または null-like な方向にのみ伝播可能であり、space-like な方向には伝播不可能であることを要請する。ここで、null-like な方向はこれらの境界を為している。すなわち、null-like な向きに伝播する信号は最も "速い" 信号であると言える。これを "光" と呼ぶことにしよう。任意の信号は光の "速さ" を超えることはできないので、当然粒子もこれを超えることはできない。特に質量を持った粒子は time-like な運動しかできない。すなわち、粒子の世界線上の接ベクトルは time-like である。